班级:______ 姓名:______ 得分:______

数学

单元素养测评卷(一)

第六章

(时间:120 分钟　分值:150 分)

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知点 $A(-1,2)$和向量 $\boldsymbol{a}=(1,3)$,且 $\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{a}$,则点 B 的坐标为　(　　)

A. $(1,8)$　　B. $(0,5)$

C. $(-3,-4)$　　D. $(3,4)$

2. 等边三角形 ABC 的边长为 1,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$　(　　)

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$

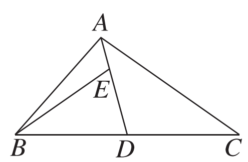
C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 设$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$是平面内的一个基底,则下面四组向量不能构成平面内的一个基底的是　(　　)

A. $2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$　　B. $3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ 和 $2\boldsymbol{e}_2-6\boldsymbol{e}_1$

C. $\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_1$　　D. $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$

4. 如图所示,在$\triangle ABC$ 中,点 D 是边 BC 的中点,E 是线段 AD 上靠近点 A 的三等分点,则 $\overrightarrow{BE}=$　(　　)



A. $\frac{5}{3}\overrightarrow{BA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

B. $\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$

C. $\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

D. $\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

5. 在$\triangle ABC$ 中,内角 A,B,C 所对的边分别为a,b,c,且 $a=x,b=2,B=60°$,若$\triangle ABC$ 有两解,则 x 的取值范围是　(　　)

A. $2<x<2\sqrt{3}$　　B. $2<x<\frac{4\sqrt{3}}{3}$

C. $\sqrt{3}<x<2$　　D. $2<x<\frac{5\sqrt{3}}{3}$

6. [2025·锦州高一期末] 在$\triangle ABC$ 中,$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$,$E$ 为边 AB 上一点,CE 与 AD 交于点 F,若 $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FD}$,则$\frac{AE}{EB}=$　(　　)

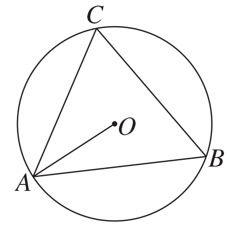
A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{5}{6}$

7. 已知 a,b,c 分别为$\triangle ABC$ 的三个内角 A,B,C 的对边,且 $a\cos C=b+\frac{2}{3}c$,则$\triangle ABC$ 是　(　　)

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形

C. 等腰三角形　　D. 钝角三角形

8. 如图,O 是锐角三角形 ABC 外接圆的圆心,内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,且 $A=\frac{\pi}{3}$,若$\frac{\cos B}{\sin C}\overrightarrow{AB}+\frac{\cos C}{\sin B}\overrightarrow{AC}=2m\overrightarrow{AO}$,则 $m=$　(　　)



A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 1

二、选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分.

9. [2025·苏州南航附中高一月考] 下列说法正确的是　(　　)

A. 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$,且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$

B. 已知$|\boldsymbol{a}|=6$,$\boldsymbol{e}$ 为单位向量,若$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}\rangle=\frac{3\pi}{4}$,则 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{e}$ 上的投影向量为$-3\sqrt{2}\boldsymbol{e}$

C. 设 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ 为非零向量,则"存在负数 λ,使得 $\boldsymbol{m}=\lambda\boldsymbol{n}$"是"$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}<0$"的充分不必要条件

D. 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是锐角

10. 在$\triangle ABC$ 中,a,b,c 分别为内角 A,B,C 的对边,则下列说法正确的是　(　　)

A. 若$\frac{a}{\cos B}=\frac{b}{\cos A}$,则$\triangle ABC$ 为等腰三角形

B. 若 $A>B$,则 $\sin A>\sin B$

C. 若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}<0$,则$\triangle ABC$ 为钝角三角形

D. 若 $A+B<C$,则 $\sin^2 A+\sin^2 B<1$

11. 在$\triangle ABC$ 中,a,b,c 分别是内角 A,B,C 的对边,其外接圆的半径为 R,内切圆的半径 $r=\frac{\sqrt{3}}{2}$,满足 $a\cos A+b\cos B+c\cos C=\frac{3\sqrt{3}R}{2}$,$S_{\triangle ABC}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$,则　(　　)

A. $a+b+c=9$

B. $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

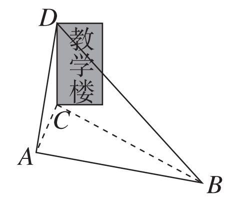
C. $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

D. $R=\sqrt{3}$

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$,$\boldsymbol{b}=(1,t)$,若$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$,则实数 t 的值为________.

13. [2025·福建宁德柘荣一中高一月考] 如图,某同学测量学校教学楼的高度时,在跑道上选择了相距 24 米的两点 A,B,分别测得楼顶 D 的仰角$\angle CAD=45°$,$\angle CBD=30°$,又测得楼底 C 与 A 的连线与跑道所成的角$\angle BAC=120°$(A,B,C 在同一水平面上),则学校教学楼的高度为________米.



14. 在$\triangle ABC$ 中,$AB=4$,$AC=3$,$\angle BAC=90°$,D 在边 BC 上(不包括端点),延长 AD 到 P,使得 $AP=9$,若 $\overrightarrow{PA}=m\overrightarrow{PB}+\left(\frac{3}{2}-m\right)\overrightarrow{PC}$($m$ 为常数),则 CD 的长度为________.

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分)已知向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$,其中 $\boldsymbol{e}_1=(1,0)$,$\boldsymbol{e}_2=(0,1)$.

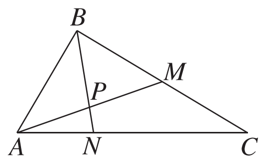
(1)求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$;

(2)求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦值.

16. (15 分)如图,在$\triangle ABC$中,已知$AB=2$,$AC=4$,$\angle BAC=60^\circ$,M是BC的中点,N是AC上的点,且$\overrightarrow{AN}=x\overrightarrow{AC}$,$AM$,$BN$相交于点$P$.设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$.

(1)若$x=\frac{1}{3}$,试用向量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$表示$\overrightarrow{AM}$,$\overrightarrow{PN}$;

(2)若$AM\perp PN$,求实数x的值.



17. (15 分)[2025・山东省实验中学高一月考] 记$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c,已知$b\cos C+\sqrt{3}b\sin C-a-c=0$.

(1)求角B的大小;

(2)若D为AC的中点,且$BD=\sqrt{3}$,$b=2$,求$\triangle ABC$的面积.

18. (17 分)[2025・成都高一期末] 在$\triangle ABC$中,内角A,B,C所对的边分别为a,b,c,已知$a\cos C+\sqrt{3}c\sin A=b+2c$.

(1)求角A的大小.

(2)设D为边BC上一点,且满足$AD=1$.

(i)若$AB=2$,$AB\perp AD$,求AC的长;

(ii)若$BD=DC$,求BC的取值范围.

19. (17 分)已知O为坐标原点,对于函数$f(x)=a\sin x+b\cos x$,称向量$\overrightarrow{OM}=(a,b)$为函数$f(x)$的相伴特征向量,同时称函数$f(x)$为向量$\overrightarrow{OM}$的相伴函数.

(1)记向量$\overrightarrow{ON}=(1,\sqrt{3})$的相伴函数为$f(x)$,当$f(x)=\frac{8}{5}$且$x\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$时,求$\sin x$的值.

(2)已知$A(-2,3)$,$B(2,6)$,$\overrightarrow{OT}=(-\sqrt{3},1)$为$h(x)=m\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$的相伴特征向量,$\varphi(x)=h\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$,请问在$y=\varphi(x)$的图象上是否存在一点$P$,使得$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}$?若存在,求出$P$点坐标;若不存在,说明理由.